X-ENS Al2
1.5

Base d'Auerbach

Lemme : Gourdon Al. 151, 152, 159

Théorème : Soit V evn réel de dim finie. Il existe une base de vecteurs unitaires de V dont la base duale est aussi formée de vecteurs unitaires pour la norme induite sur V^*.

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ unitaire, $\mathcal{B}^* = (e_1^*, \dots, e_n^*)$ sa base duale.
$\forall i \in \{1, \dots, n\}$, $e_i^*(e_i) = 1$, donc $\|e_i^*\| \geq 1$.

Dans le cas euclidien, si $\mathcal{B}$ est orthonormée, $|e_i^*(x)| = |\langle e_i, x \rangle| \leq \|x\|$ donc $\|e_i^*\| \leq 1$ et le résultat est vrai pour toute b.o.n.

IDEE

Lemme : Inégalité de Hadamard.
Soient $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^n$. $|\det(x_1, \dots, x_n)| \leq \|x_1\| \cdots \|x_n\|$ où $\|x\| = \sqrt{x^* x}$, $\langle x, y \rangle = x^* y$.

A TROUVER A LA FIN

- Clair si $(x_1, \dots, x_n)$ est liée.
- Sinon c'est une base, que l'on orthogonalise par Gram-Schmidt en $(y_1, \dots, y_n)$ et le det est conservé (transformation combinaisons linéaires)

En posant $M = (y_1 | \cdots | y_n)$, $M^* M = (y_i^* y_j)_{i,j} = \begin{pmatrix} \|y_1\|^2 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \|y_n\|^2 \end{pmatrix}$.

Donc $(\det M)^2 = \det(M^* M) = \prod_{i=1}^n \|y_i\|^2$ donc $|\det M| = \prod_{i=1}^n \|y_i\|$

De plus, lors de Gram-Schmidt, $y_k = x_k + \sum_{i=1}^{k-1} \lambda_{i,k} y_i$

donc par Pythagore $\|x_k\|^2 = \|y_k\|^2 + \sum_{i=1}^{k-1} |\lambda_{i,k}|^2 \|y_i\|^2 \geq \|y_k\|^2$

donc $\|x_k\| \geq \|y_k\|$ et $|\det(x_1, \dots, x_n)| = |\det M| = \prod_{i=1}^n \|y_i\| \leq \prod_{i=1}^n \|x_i\|$

Cas d'égalité : Si les x_k sont orthogonaux, alors $x_k = y_k$, il y a égalité.
S'il y a égalité, alors $\forall k$, $\|x_k\| = \|y_k\|$, donc les $\lambda_{i,k}$ sont tous nuls : $x_k = y_k$. la famille est orthogonale

Notons S la sphère unité de V, $\mathcal{B}_0$ une base, $f : S^n \longrightarrow \mathbb{R}_+$, $(x_1, \dots, x_n) \mapsto |\det_{\mathcal{B}_0}(x_1, \dots, x_n)|$

f est continue sur le compact S^n donc atteint son maximum $M = f(e_1, \dots, e_n) > 0$ car $f \neq 0$. $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est base unitaire.
Soit $x \in S$. Par maximalité, $|\det_{\mathcal{B}_0}(e_1, \dots, e_{i-1}, x, e_{i+1}, \dots, e_n)| \leq M$.

$$\begin{aligned} &\| \\ &|\det_{\mathcal{B}_0}(e_1, \dots, e_{i-1}, \sum_{j=1}^n e_j^*(x) e_j, e_{i+1}, \dots, e_n)| \\ &= |\sum_{j=1}^n e_j^*(x) \det_{\mathcal{B}_0}(e_1, \dots, e_{i-1}, e_j, e_{i+1}, \dots, e_n)| = M |e_i^*(x)|. \end{aligned}$$

Donc $|e_i^*(x)| \leq 1$, donc $\|e_i^*\| \leq 1$. D'où le résultat avec $(e_1, \dots, e_n)$.